

TEMA 6. ONDAS

1. Movimiento armónico simple

La situación física más sencilla donde se manifiesta el fenómeno es en el movimiento oscilatorio del péndulo simple o en el caso de una masa acoplada a un muelle. La fuerza ejercida por un muelle (ideal) sobre una masa viene dada por la ley de Hooke:

$$\overrightarrow{F_M} = -k\vec{r},$$

donde k es la constante del muelle que caracteriza su rigidez y $\vec{r}$ es el desplazamiento con respecto a la **longitud en reposo** l_0 del muelle en la dirección del eje definido por el propio muelle. Suponiendo el muelle en el eje x ,

$$F_M = -kr_x = -k(l - l_0)$$

donde l es la elongación del muelle en el eje x . La longitud en reposo l_0 es la distancia donde la fuerza del muelle es nula. Aplicando la segunda ley de Newton, vemos que la aceleración sigue la ecuación:

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{r},$$

su magnitud es proporcional al desplazamiento, mientras que su dirección es opuesta.

Como consecuencia la masa acoplada al muelle describe un **movimiento armónico simple** (MAS). Consideremos el muelle en el eje x . Entonces, la ecuación de movimiento asociada a este tipo de aceleración es:

$$r_x = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

Donde:

- A es la **amplitud** que corresponde al desplazamiento máximo con respecto al equilibrio.
- ω es la **frecuencia angular** que determina el **periodo** T que emplea la masa para realizar una oscilación completa alrededor del equilibrio:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

también definimos la **frecuencia**:

$$f = \omega/2\pi$$

que se mide en hercios (Hz),

$$1 \text{ Hz} = 1 \frac{1}{s}.$$

- δ es una **fase inicial** que simplemente determina el desplazamiento de la masa con respecto al equilibrio en el instante inicial,

$$r_{x,i} = A \operatorname{sen} \delta.$$

De aquí se deduce la velocidad de la masa,

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \delta),$$

y la aceleración,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 \underbrace{A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)}_{r_x},$$

Como estas expresiones deben coincidir, deducimos que la frecuencia de una masa acoplada a un muelle de constante k está relacionada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hay que destacar que en un **movimiento armónico simple** la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

Además, se cumple que la fuerza ejercida por el muelle es conservativa, y la energía potencial de la masa acoplada al muelle es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 = \\ &= \frac{1}{2} k r_x^2 = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

donde $l = r_x + l_0$ es la longitud de elongación del muelle.

Por otro lado, la energía cinética de la masa acoplada al muelle es:

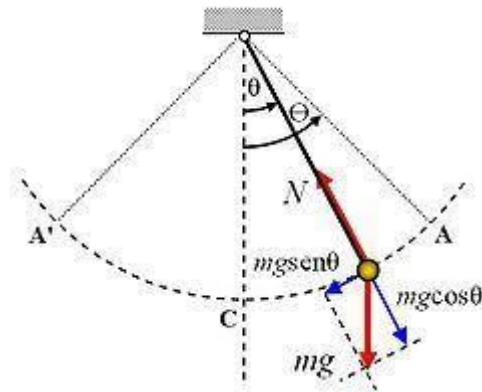
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v_x^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en la expresión de la energía mecánica de la masa, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E_{mec} &= K + U = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kr_x^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) = \\
 &= \frac{1}{2}kA^2 (\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)) = \\
 &= \frac{1}{2}kA^2
 \end{aligned}$$

Importante: La energía mecánica de un movimiento armónico simple se conserva y es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Otro caso interesante de oscilador armónico es el péndulo simple



Para pequeñas oscilaciones ($\sin \theta \approx \theta$), la ecuación es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \cdot \theta = -\omega^2 \cdot \theta$$

Una solución es:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \delta)$$

Donde la frecuencia angular ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Y el período T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para oscilaciones de gran amplitud, el movimiento sigue siendo periódico, pero ya no es armónico. Para una oscilación θ_0 :

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{2^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \text{sen}^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

En casos más realistas:

- Donde la fuerza de rozamiento no es despreciable, el movimiento descrito por la masa acoplada al muelle es en un **movimiento oscilatorio amortiguado**. Si el amortiguamiento es tan grande que ni siquiera se efectúa una oscilación completa y la velocidad se aproxima a cero cuando el oscilador se acerca a la posición de equilibrio, el movimiento es **sobreamortiguado** (por ejemplo, un péndulo que oscila en un medio denso como la melaza). También puede ocurrir que el amortiguamiento sea débil y la amplitud decrezca lentamente con el tiempo. En este caso diremos que el movimiento es **subamortiguado** (por ejemplo, un columpio).

Cuando se tiene el amortiguamiento mínimo para producir un movimiento no oscilatorio, se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**.

La fuerza de amortiguamiento:

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

$$b = \text{cte}$$

Dicha fuerza se opone a la dirección del movimiento y realiza un trabajo negativo, por lo que la energía mecánica disminuye. Esta energía es proporcional a la amplitud y disminuye exponencialmente con el tiempo:

$$A^2 = A_0^2 \cdot e^{-t/\tau}$$

Donde τ es el **tiempo de extinción** o **constante de tiempo** (m es la masa del oscilador):

$$\tau = \frac{m}{b}$$

La frecuencia angular ω' del oscilador amortiguado:

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$$

Donde ω_0 es la frecuencia angular del oscilador no amortiguado.

Se define el **factor de calidad** Q (adimensional), relacionado con la pérdida de energía por ciclo:

$$Q = \omega_0 \cdot \tau$$

Por tanto:

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

- Donde existe una fuerza externa adicional, el movimiento descrito por la masa acoplada al muelle es en un **movimiento oscilatorio forzado**. Este tipo de movimiento adquiere especial importancia en estructuras elevadizas como puentes. Cuando la frecuencia impulsora coincide con la frecuencia natural del sistema ω_0 , este oscilará con una amplitud relativamente grande y la energía absorbida en cada ciclo es máxima. Este fenómeno se denomina **resonancia** y por eso a la frecuencia natural del sistema se la llama **frecuencia de resonancia**.

Ecuación de la posición (elongación) del oscilador forzado:

$$x(t) = A \sen(\omega t + \delta)$$

Donde:

ω : frecuencia angular de la fuerza impulsora ($F_{ext} = F_0 \sen(\omega t)$)

A : amplitud del oscilador forzado

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

δ : fase inicial del oscilador forzado

$$\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Problema: Sobre un plano inclinado de $\varphi = 45^\circ$ se tiene un muelle, sujeto por un extremo al plano y que soporta por el otro extremo un bloque de masa $M = 1 \text{ kg}$. La longitud

natural del muelle es $l_0 = 0,5 \text{ m}$ y su constante recuperadora $k = 4 \text{ N/m}$. Suponemos el rozamiento despreciable.

- Calcular la elongación l_{eq} del muelle en el punto de equilibrio mecánico.
1. Primero planteamos el diagrama de fuerzas para el bloque y el muelle. Además, usamos un sistema de referencia con eje x paralelo al plano y al eje del muelle.
 2. Aplicamos la condición de equilibrio mecánico para las fuerzas en la dirección del muelle:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_M| + Mg \sin \varphi &= 0, \\ -k(l_{eq} - l_0) + Mg \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

despejando l_{eq} obtenemos

$$l_{eq} = \frac{Mg \sin \varphi + kl_0}{k} = \frac{1 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 0,5}{4} = 2,23 \text{ m}$$

- Desde la posición de equilibrio del muelle, se estira una distancia $l_{max} = 25 \text{ cm}$ y se deja oscilar libremente. Calcular la ecuación del movimiento del bloque en el eje x' definido por el muelle (en el SI).

1. Utilizando el mismo sistema de coordenadas paralelo al eje del muelle, planteamos la ley de Newton después de sustituir $l = r_{x'} + l_{eq}$

$$\begin{aligned} |\vec{F}_M| + Mg \sin \varphi &= M|\vec{a}|, \\ -k(r_{x'} + l_{eq} - l_0) + Mg \sin \varphi &= M|\vec{a}| \\ -kr_{x'} - \underbrace{k(l_{eq} - l_0)}_{=0} + Mg \sin \varphi &= M|\vec{a}| \\ -kr_{x'} &= M|\vec{a}|, \end{aligned}$$

por tanto, el movimiento es MAS.

2. Calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 2 \text{ rad/s}$$

3. La amplitud coincide con l_{max} . Esto se puede ver utilizando la conservación de la energía mecánica sabiendo que en la máxima elongación l_{max} la energía cinética es cero. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$r_{x'} = 0,25 \operatorname{sen} \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) m$$

2. Movimiento ondulatorio

En la naturaleza existen abundantes ejemplos de perturbaciones producidas en un medio material que se propagan a través de dicho medio, como por ejemplo el movimiento de la superficie del agua cuando tiramos una piedra a un estanque, o las olas originadas por el viento en el mar. Esta propagación recibe el nombre de **onda**.

Pero también son ondas el sonido, la luz visible, las ondas de radio y televisión, el bluetooth y los infrarrojos de los mandos a distancia, etc. Así, no es exagerado decir que estamos rodeados de ondas.

Si la perturbación alcanza al cabo de un tiempo a todos los puntos del medio, entonces dicha perturbación recibe el nombre de onda **viajera**. En cambio, hablamos de onda **estacionaria** si la propagación está delimitada por fronteras a una región específica (por ejemplo, la onda que se produce cuando pulsamos la cuerda de una guitarra).

Las ondas tienen gran importancia por muchos motivos:

- 1) La información que nos llega por nuestros sentidos nos llega en forma de ondas viajeras.
- 2) El comportamiento íntimo de la materia (átomos y partículas subatómicas) se explica mediante ondas estacionarias.

En este tema estudiaremos los diferentes tipos de ondas que se transmiten a través de medios materiales y sus características principales.

3. Noción de onda.

Una onda se puede definir como una perturbación de un estado de equilibrio que se propaga por el espacio.

Es de sobra conocido el péndulo de Newton, que podemos ver en la foto siguiente:



Para explicar el fenómeno de propagación por un medio, podemos representar una serie de partículas de dicho medio mediante las bolas del péndulo de Newton.

<https://www.youtube.com/watch?v=Rl132w2WbxQ>

Como se puede ver en el vídeo, si desplazamos una de las bolas y la soltamos, toda la energía potencial se transforma en cinética que se transmite en el momento del choque a cada una de las bolas siguientes, hasta que la última bola sube hasta una posición tal que alcanza la misma energía potencial de la primera bola.

Podemos deducir las siguientes consecuencias:

- En una onda solamente se transmite la energía de la partícula que origina el movimiento. Esta partícula recibe el nombre de **centro emisor**.
- La energía del centro emisor se transmite a través de otras partículas intermedias del medio, que debe ser elástico (no experimentar deformaciones permanentes).
- Las partículas intermedias no se desplazan mientras transmiten la energía.

Por tanto, **una onda es una propagación de energía sin que haya desplazamiento de materia**. Cuando una onda se propaga, las partículas del medio no acompañan al movimiento de avance de la onda. Para que se produzca un movimiento ondulatorio, se necesita un manantial de energía, o centro emisor, que produzca una perturbación y un medio elástico que transmita dicha perturbación.

3.1. Tipos de ondas

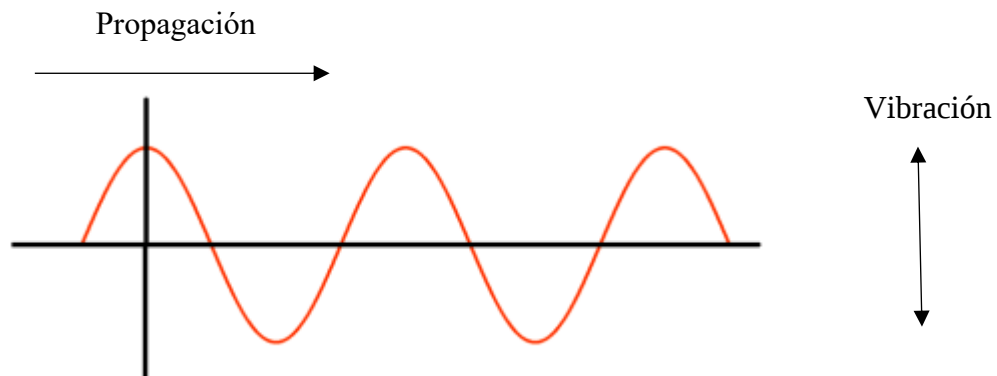
Por el tipo de energía que se propaga

- **Ondas mecánicas:** Se propaga energía mecánica. También reciben el nombre de **ondas materiales**, porque necesitan un medio material de propagación (por ejemplo, las ondas sonoras). Si la energía propagada es

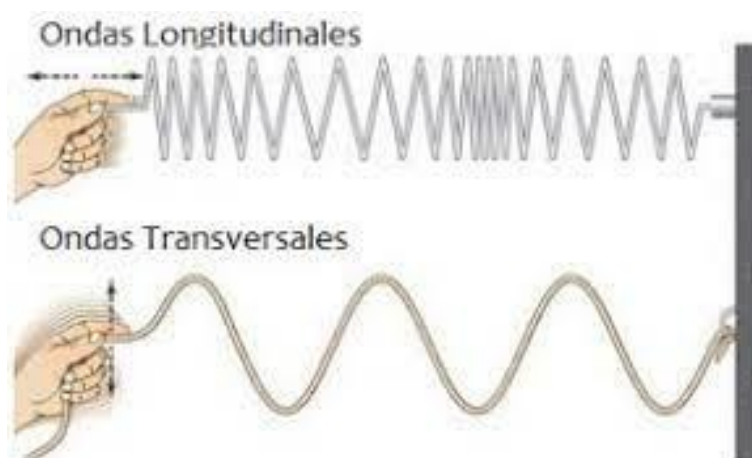
originada por un oscilador armónico, las ondas reciben el nombre de **ondas armónicas materiales** y las partículas, aunque no se desplazan, se mueven con m.a.s.

- **Ondas electromagnéticas:** Se propaga energía electromagnética producida por osciladores de cargas eléctricas aceleradas, No se necesita medio material de propagación. Por ejemplo, la luz.

Por la relación entre la dirección de propagación y la de vibración



- **Ondas longitudinales:** Cuando la dirección de vibración de las partículas coincide con la dirección de propagación. Una onda longitudinal es una sucesión de contracciones y dilataciones del medio. Estas ondas también reciben el nombre de **ondas de presión** (por ejemplo, las ondas sonoras).
- **Ondas transversales:** Cuando la dirección de vibración de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación. Una onda transversal es una sucesión de crestas y valles.



Por el número de dimensiones en que se propaga la energía

- **Ondas unidimensionales:** La energía se propaga en una dimensión. Por ejemplo, la onda que se propaga por una cuerda.
- **Ondas bidimensionales:** La energía se propaga en dos dimensiones. Por ejemplo, las ondas que se propagan por la superficie del agua.
- **Ondas tridimensionales:** La energía se propaga en tres dimensiones. Por ejemplo, el sonido.

3.2. Magnitudes características de las ondas

Algunas de las magnitudes coinciden con las vistas en el movimiento armónico simple:

- A es la **amplitud** que corresponde a la máxima elongación de las partículas del medio. Solamente depende de la energía que propaga la onda. También se puede definir como el desplazamiento máximo de un punto de la onda con respecto al equilibrio.
- ω es la **frecuencia angular** que determina el **periodo** T que emplea la masa para realizar una oscilación completa alrededor del equilibrio:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

también definimos la **frecuencia**:

$$f = \omega/2\pi$$

que se mide en hercios (Hz),

$$1 \text{ Hz} = 1 \frac{1}{\text{s}}.$$

- δ es la **fase inicial** que simplemente determina el desplazamiento de la onda en el instante inicial.
- La **longitud de onda** λ : es la distancia que se ha propagado la onda en un periodo, es decir, mientras el centro emisor ha efectuado una vibración completa. También se puede definir como la distancia entre dos puntos consecutivos de una onda que están en la misma fase.

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}$$

- **Velocidad de propagación v :** las ondas se propagan con una velocidad específica, la cual depende de las propiedades del medio (elasticidad y rigidez). También recibe el nombre de **velocidad de fase**. Si el medio es homogéneo e isótropo, la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones.

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Siendo λ la longitud de onda y T el período.

Veamos cómo se calculan algunas velocidades:

- Velocidad de una onda transversal en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\eta}}$$

Donde F_T es la tensión de la cuerda (en N) y η es la densidad lineal de la cuerda (en kg/m).

- Velocidad de una onda longitudinal en un sólido:

$$v = \sqrt{\frac{J}{\rho}}$$

Donde J es el módulo de Young que determina la elasticidad del sólido (en N/m² o en Pa) y ρ es la densidad cúbica del sólido (en kg/m³).

- Velocidad del sonido en un gas:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Donde γ es el coeficiente adiabático del gas (para el aire, $\gamma = 1,4$), R es la constante de los gases ideales (8,31 J/mol K), T es la temperatura absoluta (en K) y M es la masa molar del gas (en kg/mol)

- Velocidad de una onda electromagnética en el vacío:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- **Número de onda k :** se define como el número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La relación entre el número de onda k , la velocidad de fase v y la frecuencia angular ω es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$$

4. Ecuación de onda

En el caso en que una onda pueda representarse como función de la posición y el tiempo $u(x, y, z, t)$, podemos obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Como caso particular, si nuestra onda se representa como $y(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Una solución de esta ecuación son las ondas armónicas (dependencia en seno y/o coseno, sabiendo que la diferencia de fase entre seno y coseno es de $\frac{\pi}{2}$ rad):

$$y(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \delta)$$

El **signo** $-$ entre la parte temporal ωt y la parte espacial kx indica que **la propagación de la onda se hace en el sentido de x creciente**, mientras que el **signo** $+$ indica lo contrario.

La **unidad SI** de $y(x, t)$ es el **metro** (m)

Ejercicio: Una onda armónica que viaja en el sentido positivo del eje OX tiene una amplitud de 8 cm, una longitud de onda de 20 cm y una frecuencia de 8 Hz. El desplazamiento transversal en $x = 0$ para $t = 0$ es cero. Calcular:

a) El número de onda.

$$\lambda = 20 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,2 \text{ m}} = 10\pi \text{ m}^{-1} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

b) *El período y la frecuencia angular.*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8 \text{ s}^{-1}} = 0,125 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,125 \text{ s}} = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

c) *Velocidad de fase de la onda:*

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{10\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Notar que también podríamos haber aplicado la siguiente fórmula:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,2 \text{ m}}{0,125 \text{ s}} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) *La ecuación de la onda:*

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \delta)$$

$$A = 8 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0,08 \text{ m}$$

Sabemos que:

$$\omega = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Por tanto:

$$y(x,t) = 0,08 \cos(16\pi t - 10\pi x + \delta) \text{ m.}$$

Para saber el valor de la fase inicial δ :

$$y(0,0) = 0,08 \cos(16\pi \cdot 0 - 10\pi \cdot 0 + \delta) = 0$$

$$y(0,0) = 0,08 \cos(\delta) = 0$$

$$\cos(\delta) = 0$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Entonces, la ecuación queda:

$$y(x,t) = 0,08 \cos (16\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{2}) \text{ m.}$$

Una **propiedad importante** de las ondas armónicas es que son **periódicas en el espacio** (período espacial λ) y **en el tiempo** (período temporal T):

a) En el espacio:

$$\begin{aligned} y(x+n\lambda, t) &= A \cos (\omega t - k(x + n\lambda) + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t - kx - kn\lambda + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t - kx - \frac{2\pi}{\lambda} n\lambda + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t - kx + \delta - 2\pi n) = \\ &= (\text{usando el coseno de la resta de ángulos}) = \\ &= A [\cos (\omega t - kx + \delta) \cdot \underbrace{\cos (2\pi n)}_1 + \sin (\omega t - kx + \delta) \cdot \underbrace{\sin (2\pi n)}_0] = \\ &= A (\cos (\omega t - kx + \delta)) = y(x, t) \end{aligned}$$

b) En el tiempo:

$$\begin{aligned} y(x, t+nT) &= A \cos (\omega(t + nT) - kx + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t + \omega nT - kx + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t + \frac{2\pi}{T} nT - kx + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t - kx + \delta + 2\pi n) = \\ &= (\text{usando el coseno de la suma de ángulos}) = \\ &= A [\cos (\omega t - kx + \delta) \cdot \underbrace{\cos (2\pi n)}_1 - \sin (\omega t - kx + \delta) \cdot \underbrace{\sin (2\pi n)}_0] = \\ &= A (\cos (\omega t - kx + \delta)) = y(x, t) \end{aligned}$$

Consecuencias:

- Todos los puntos de un medio que distan entre sí un número entero de longitudes de onda ($n\lambda$) en la misma dirección de propagación están en fase, es decir, con la misma elongación o estado de vibración.

- Todos los puntos que equidistan del centro emisor están en fase entre sí. Este hecho nos permite definir lo que se conoce como **frente de onda** (lugar geométrico de los puntos que en un instante dado están en fase). Según sea dicho frente de onda, las ondas se clasifican en:
 - **Ondas planas:** los frentes de onda son superficies planas.
 - **Ondas circulares:** los frentes de onda son circunferencias concéntricas (ondas bidimensionales).
 - **Ondas esféricas:** los frentes de onda son superficies esféricas (ondas tridimensionales).
- Si el **medio** es **homogéneo e isótropo**, la **dirección de propagación** es siempre **perpendicular al frente de onda**. Cada dirección de propagación recibe el nombre de **rayo**.

5. Energía de una onda

Cuando una onda avanza transporta energía en la dirección y sentido en que viaja.

Una onda armónica transmite la energía de un oscilador armónico. Por tanto, si suponemos que nuestro emisor es una partícula de masa m con un m.a.s., su energía mecánica será:

$$E_0 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m \omega^2}_k A^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{(2\pi f)^2}_{\omega^2} A^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2$$

Esta energía mecánica se transmite en todas las direcciones en forma de ondas esféricas a una velocidad v . Al cabo de un tiempo t_1 la energía se habrá repartido entre las partículas que forman el frente de onda de radio $r_1 = v \cdot t_1$ y lo mismo pasará al cabo de un tiempo t_2 ($r_2 = v \cdot t_2$), con lo cual:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 2m_1\pi^2 f^2 A_1^2 = 2m_2\pi^2 f^2 A_2^2$$

Suponiendo que el medio tiene una densidad ρ y que los frentes de onda esféricos de superficie $S = 4\pi r^2$ tienen un espesor dr , para cada masa se cumple:

$$\begin{aligned} m_1 &= S_1 dr \rho = 4\pi r_1^2 dr \rho \\ m_2 &= S_2 dr \rho = 4\pi r_2^2 dr \rho \end{aligned}$$

Sustituyendo, la igualdad de las energías será de la forma:

$$r_1^2 A_1^2 = r_2^2 A_2^2$$

De ahí se obtiene:

$$r_1 A_1 = r_2 A_2$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$r \cdot A = cte$$

Se llama **intensidad de un movimiento ondulatorio** en un punto a la cantidad de energía E que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie S colocada en dicho punto en la unidad de tiempo. Se mide en $\frac{W}{m^2}$:

$$I = \frac{E}{S \cdot t} = \frac{P}{S}$$

Donde P es la potencia de la fuente o foco emisor.

A partir de las relaciones vistas anteriormente, estudiando la variación de intensidad que se produce en un frente de ondas a medida que se produce la propagación, podemos deducir que:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

6. Ondas sonoras

El sonido es el ejemplo más conocido de onda elástica longitudinal. Las personas percibimos el sonido a través de la audición, que tiene lugar en el oído. Si la vibración no es periódica, recibe el nombre de ruido.

El rango de frecuencias que percibe el oído humano está comprendido entre los 16 Hz y los 20000 Hz. Las ondas de frecuencias inferiores a 16 Hz se denomina infrasonidos y las de frecuencias superiores a 20000 Hz, ultrasonidos.

Las cualidades del sonido son:

- a) **Sonoridad**, que distingue los sonidos fuertes (alta energía o intensidad) de los débiles (baja energía o intensidad). Depende del cuadrado de la amplitud de la onda sonora.

- b) **Tono**, que distingue los sonidos agudos (altas frecuencias) de los graves (bajas frecuencias). Depende de la frecuencia de la onda.
- c) **Timbre**, que distingue los sonidos de frecuencias puras (frecuencia fundamental) de otros sonidos mezclados con frecuencias múltiplos de dicha frecuencia fundamental (armónicos). Estos armónicos son los que distinguen la misma nota producida por dos instrumentos distintos. Depende, por tanto, de la forma de la onda.

Dado que la intensidad fisiológica o sensación sonora del oído humano resulta ser logarítmica, no resulta adecuado medir la intensidad sonora en vatios por metro cuadrado. En su lugar, se utiliza el **nivel de intensidad sonora** o **nivel de sonido**, dado por la siguiente relación:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Donde la intensidad $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ es el valor de referencia, tomado arbitrariamente para el caso del aire y una onda de frecuencia 1000 Hz. Esta intensidad es aproximadamente la mínima intensidad perceptible por el oído humano o umbral auditivo.

Aunque β es un número adimensional, se expresa en **decibelios** (dB). El nivel correspondiente a la intensidad de referencia es 0 dB (cero decibelios).

Ejercicio: *Demostrar que un sonido con un nivel de intensidad de 70 dB tiene una intensidad 1000 veces mayor que uno de 40 dB.*

Sustituyendo:

$$70 = 10 \log \left(\frac{I_{70}}{I_0} \right)$$

$$40 = 10 \log \left(\frac{I_{40}}{I_0} \right)$$

Restando ambas expresiones:

$$70 - 40 = 10 \log \left(\frac{I_{70}}{I_0} \right) - 10 \log \left(\frac{I_{40}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{\frac{I_{70}}{I_0}}{\frac{I_{40}}{I_0}} \right)$$

$$30 = 10 \log \left(\frac{I_{70}}{I_{40}} \right)$$

$$3 = \log \left(\frac{I_{70}}{I_{40}} \right)$$

A partir de la definición de logaritmo:

$$10^3 = \frac{I_{70}}{I_{40}} \Rightarrow 10^3 \cdot I_{40} = I_{70}$$

La escala decibélica:



La escala decibélica es apropiada porque el oído humano es capaz de percibir sonidos con una amplitud de presión que varía en un rango espectacularmente grande de más de 7 órdenes de magnitud. La amplitud de la presión sonora más débil que puede percibir el humano depende de la frecuencia, pero es del orden de $10^{-5} \frac{W}{m^2}$, mientras que el umbral del dolor es aproximadamente de $10 \frac{W}{m^2}$, que son valores muy pequeños comparados con el valor de la presión atmosférica al nivel del mar, que es de $10^5 \frac{W}{m^2}$. Este hecho es muy importante porque así las ondas sonoras percibidas se propagan sin pérdidas ni distorsiones apreciables.

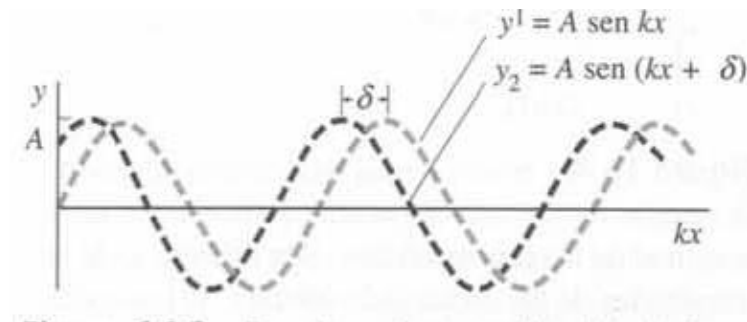
Precisamente porque la percepción sonora del ser humano depende de la frecuencia, en ocasiones se utiliza una escala corregida que para distinguirla de la anterior se mide en decibelios A (dBA).

7. Superposición de ondas e interferencias: Ondas estacionarias

El **principio de superposición** consiste en lo siguiente: Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.

El resultado de la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia depende de la diferencia de fase δ entre las ondas.

Sean las ondas: $y_1(x, t) = A \sen(\omega t - kx)$ e $y_2(x, t) = A \sen(\omega t - kx + \delta)$.



La onda resultante es la suma:

$$y_1 + y_2 = A \sen(\omega t - kx) + A \sen(\omega t - kx + \delta)$$

Usando trigonometría:

$$\sen\theta_1 + \sen\theta_2 = 2\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\sen\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

Donde

$$\theta_1 = \omega t - kx$$

$$\theta_2 = \omega t - kx + \delta$$

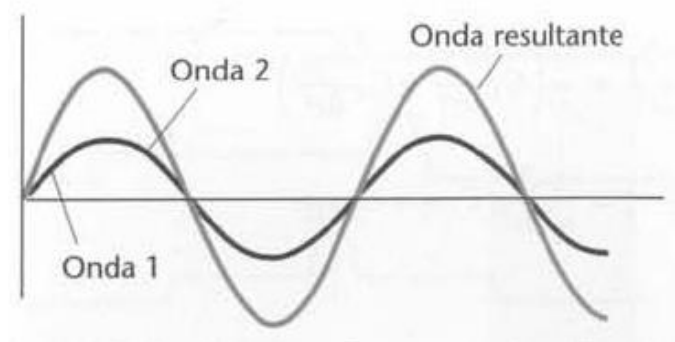
Quedando:

$$y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \cdot \sen\left(\omega t - kx + \frac{1}{2}\delta\right)$$

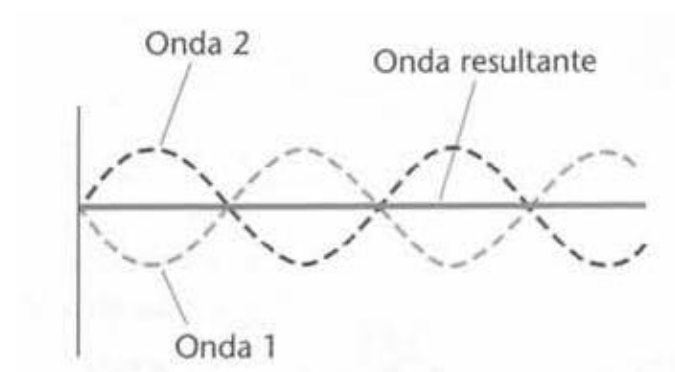
La onda resultante tiene una amplitud igual a $2A \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right)$ y una fase igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales.

La superposición de dos o más ondas de frecuencia igual o muy parecida que da un patrón de intensidad observable se llama **interferencia**.

Si las dos ondas están en fase, $\delta = 0$ y la amplitud es $2A$. La interferencia es **constructiva**.



Por el contrario, si están desfasadas π rad, la amplitud de la onda resultante es nula y la interferencia es **destructiva**.



Un caso especial de diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia de longitud entre trayectos desde la fuente hasta donde se produce la interferencia. Supongamos dos focos emisores de ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda y que están en fase.

$$p_1 = A \operatorname{sen} (\omega t - kx_1)$$

$$p_2 = A \operatorname{sen} (\omega t - kx_2)$$

Si la diferencia de trayectos es de un **número entero de longitudes de onda**, la **interferencia** será **constructiva**. Si es un **número impar de semilongitudes de onda**, la **interferencia** será **destructiva**.

$$\delta = 2\pi \frac{|x_2 - x_1|}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

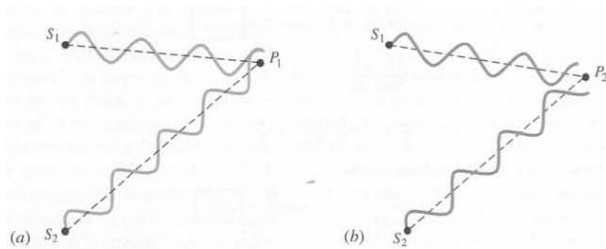


Figura 16.6 Las ondas en fase procedentes de dos focos S_1 y S_2 , que están en fase se encuentran en un punto P_1 . (a) Cuando la diferencia de trayectos es de una longitud de onda λ , las ondas están en fase en P_1 e interfieren constructivamente. (b) Cuando la diferencia de trayectos es $\frac{1}{2}\lambda$, las ondas en P_2 están desfasadas 180° y por lo tanto interfieren destructivamente. Si las ondas son de la misma amplitud en P_2 , ambas se anularán totalmente en este punto.

7.1. Ondas estacionarias

Cuando las ondas están confinadas en el espacio, se producen reflexiones en los extremos y existen ondas que se mueven en los dos sentidos y se combinan de acuerdo con el principio de superposición.

Para una cuerda o tubo determinados, existen ciertas frecuencias para las cuales la superposición da un patrón de vibración estacionario denominado **onda estacionaria**. Este tipo de ondas tienen importantes aplicaciones en instrumentos musicales y en teoría cuántica. Existe la **frecuencia fundamental** o **primer armónico**, y las **frecuencias múltiplos enteros de la fundamental** o **armónicos**.

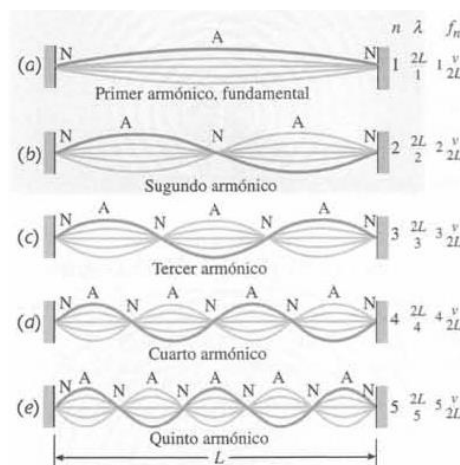
En el caso de estar **ambos extremos fijos**, la condición de onda estacionaria para la longitud L y la longitud de onda del armónico n λ_n es:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

La frecuencia del enésimo armónico:

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Donde f_1 es la frecuencia fundamental.



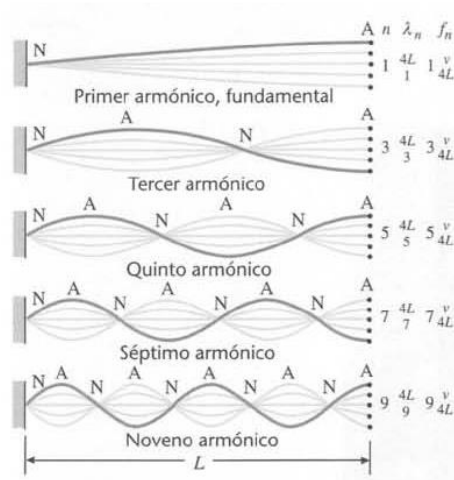
Si solo hay un **extremo libre**, la condición de onda estacionaria:

$$L = n \frac{\lambda_n}{4}; \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

La frecuencia del n -ésimo armónico:

$$f_n = n \frac{v}{4L} = n f_1; \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

Donde f_1 es la frecuencia fundamental. En este caso se pierden los armónicos pares.



La función de onda para una onda estacionaria:

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

Condiciones necesarias para el movimiento de una onda estacionaria en una cuerda:

- 1) Cada punto de la cuerda o bien permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple (los puntos en reposo son los nodos).
- 2) El movimiento oscilante de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos se produce en fase o con un desfase de π rad (180°).